

Aufgabe 27

(i) $u \in W^{1,1}(I)$

$$u \in L^1(I)$$

z.z. Für L^1 -fast alle $a, b \in I$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = I$$

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t) dt$$

Komp. $u_k \xrightarrow{L^1(K)} u$
 $u_k' \xrightarrow{L^1(K)} u'$
 schwach Abl. von u

$K \subset \subset I$ dann ex. $u_k \in C^\infty(K) \cap W^{1,1}(K)$

Kompakt enthalten

insb. für fast alle $a, b \in K$ gilt $u(b) - u(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(b) - u_k(a)$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b u_k'(y) dy = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} u_k'(y) dy = \int_a^b u'(y) dy$$

Hauptsatz

$$u_k \xrightarrow{L^1(K)} u$$

mit Aufgabe 26

L^1 Konv. $\Rightarrow$ pw. Konv. f.ä. für Teilfolge
 $\Leftrightarrow u_k$ schon passend

Mit einer abzählbaren Ausschöpfung von I mit $K_n = I_n$ gilt die Aussage in ganz I

(ii) $u, v \in L^1(I)$ mit

$$u(b) - u(a) = \int_a^b v(t) dt$$

L^1 f.ä. für $a, b \in I$

z.z. $u \in W^{1,1}(I)$ mit $u' = v$

$$u \in L^1(I) \checkmark$$

$$\exists \partial u \in L^1 \checkmark$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I) : \int \partial u \varphi = - \int u \varphi'$$

vorbeif

Also vorbeif z.z. $u' = v$ im schwachen Sinne dann folgt $u \in W^{1,1}(I)$ nach Definition

Sei $\varphi \in C_0^\infty(I)$ $a \in I$ mit $a < \inf \text{supp } \varphi$

$$\int_I u(x) \varphi'(x) dx = \int_I (u(x) - u(a)) \varphi'(x) dx + u(a) \int_I \varphi'(x) dx = \int_I (u(x) - u(a)) \varphi'(x) dx + u(a) \left(\varphi \Big|_{\inf I}^{\sup I} \right)$$

$$= \int_I \int_a^x v(y) dy \varphi'(x) dx = \int_I \int_I v(y) \chi_{[a,x]}(y) \varphi'(x) dx dy$$

I offen

$\varphi \in C_0^\infty(I)$
 $\text{supp } \varphi \subset I$

$$= \int_I v(y) \int_I \varphi'(x) \chi_{[a,x]}(x) dx \chi_{[a,\infty)}(y) dy = \int_I v(y) \int_y^{\sup I} \varphi'(x) dx \chi_{[a,\infty)}(y) dy = \int_I v(y) \left(\varphi(x) \Big|_{x=y}^{x=\sup I} \right) \chi_{[a,\infty)}(y) dy$$

$$= \int_I v(y) \chi_{[a,\infty)}(y) (-\varphi(y)) dy = - \int_I v(y) \varphi(y) \chi_{[a,\infty)}(y) dy$$

$$\xrightarrow{a < \inf I} \int_I v(y) \varphi(y) dy$$

Aufgabe 28

$\mathcal{H}$ Hilbertraum $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$

(i) Seien $x, y \in \mathcal{H}$ $\langle STx, y \rangle = \langle S(Tx), y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle$

T^*S^* linear nach LA und T^*S^* beschränkt (submultiplikativität)

$$\Rightarrow T^*S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

$$\xrightarrow{\text{insb.}} T^*S^* = (ST)^*$$